SESSION DE 1991

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Options M et P'

DURÉE : 2 heures

Le problème a pour objet le calcul des valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle d'ordre n:

$$T_n = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \quad \text{où } \forall\, i \in [1, \ldots, n-1],\ b_i \neq 0.$$

Les procédures et fonctions demandées plus loin sont les parties d'un programme dont l'en-tête contient les déclarations :

```
Const n = 20 {ordre maximum des matrices envisagées};
Type vecteur = Array [O .. n] of real;
Var A, B, U : Vecteur;
    R, S    : Real;
```

La variable A contient la diagonale principale de T_n avec $A[0] := 0$, et B contient l'autre diagonale avec $B[0] := 0$ et $B[n] := 0$.

Les données A et B sont supposées en mémoire.

Pour U, voir paragraphe 4 et pour R, S, voir paragraphe 3.

1. On note P_k le polynôme caractéristique de :

$$T_k = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots & b_{k-1} \\ & & & & & b_{k-1} & a_k \end{bmatrix}$$

matrice d'ordre k avec $2 \leqslant k \leqslant n$.

a. On pose $P_0(t) = 1$ et $P_1(t) = a_1 - t$. Démontrer la relation de récurrence, pour $k \geqslant 2$:

$$P_k(t) = (a_k - t)\,P_{k-1}(t) - b_{k-1}^2\,P_{k-2}(t).$$

A SUIVRE

b. Démontrer que les zéros de P_k sont réels et d'ordre un.

c. Prouver que, pour tout $k \geqslant 2$, P_k et P_{k-1} n'ont aucun zéro commun.

2. Soit u un nombre réel fixé; on dit que deux polynômes consécutifs P_{k-1} et P_k présentent une concordance de signe en u, si $P_{k-1}(u)$ et $P_k(u)$ ont le même signe.

Si $P_k(u)$ est nul, alors par convention, son signe est celui de $-P_{k-1}(u)$.

On note $C(u)$ le nombre de concordances de signe en u du $(n+1)$-uplet :

$$(P_0(u),\ P_1(u),\ \ldots,\ P_n(u)).$$

On admettra, sans démonstration, que le nombre de valeurs propres de T_n qui sont strictement supérieures à u est égal à $C(u)$.

Programmer, en langage Pascal, la fonction donnant le nombre de valeurs propres strictement supérieures à u.

Function NbValeursPropres (u : real) : integer;

On utilisera, comme variables locales :

- NVP contenant le nombre de valeurs propres trouvées au fur et à mesure;
- P1, P2, P3 contenant respectivement, à un certain stade : $P_{k-1}(u)$, $P_k(u)$, $P_{k+1}(u)$.

On expliquera la signification des autres variables locales utilisées.

3. On admettra que toutes les valeurs propres appartiennent à l'intervalle [R, S] tel que :

$$R = \min_{i \in [1 \ldots n]} (a_i - |b_{i-1}| - |b_i|) \quad \text{et} \quad S = \max_{i \in [1 \ldots n]} (a_i + |b_{i-1}| + |b_i|).$$

Écrire une procédure donnant R et S.

Procedure Intervalle (Var R, S : real);

4. Écrire une procédure séparant toutes les valeurs propres de T_n par dichotomies à partir de [R, S]. Cette procédure fournira $(n+1)$ valeurs $U[0] < U[1] < \cdots < U[n]$ dans [R, S] telles que chaque intervalle $[U[k-1], U[k]]$ contienne une et une seule valeur propre de T_n.

Procedure Séparation (Var U : Vecteur);

5. Connaissant les $U[k]$ pour k de 0 à n, écrire une procédure calculant, par dichotomies, les n valeurs propres de T_n à une précision donnée :

Procedure CalculValeursPropres (Précision : real; Var VP : Vecteur);

6. Soit la matrice :

$$T_6 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & 1 & \\ & 0 & & 1 & 3 & 1 \\ & & & & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

a. Donner l'intervalle [R, S] contenant toutes les valeurs propres de T_6 et à l'aide d'une calculatrice programmable, séparer les valeurs propres de T_6. (On pourra se contenter de programmer la fonction « Nb Valeurs Propres » et d'achever « à la main ».)

b. Calculer les deux plus grandes valeurs propres de T_6 à la précision 10^{-4}.

Il est demandé de présenter, dans un tableau clair, **toutes** les valeurs encadrant les valeurs propres cherchées, obtenues par dichotomies jusqu'à la précision souhaitée.

FIN